

# **Modélisation et Analyse de Systèmes Hybrides**

## **Projet IMAG « MASH »**

### **Rapport final**

**Eugene Asarin**

**VERIMAG**

**Jean Della Dora**

**LMC**

**Sergio Yovine**

**VERIMAG**

**Novembre 2002**

## **TABLE DES MATIERES**

<b>1. INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte	1
1.2 Objectifs	1
1.2.1 Objectifs scientifiques	1
1.2.2 Objectifs sociétales	2
<b>2. CONTRIBUTIONS SCIENTIFIQUES</b>	<b>2</b>
2.1 Etude mathématique de la notion de système hybride	2
2.1.1 Les systèmes par morceaux	3
2.1.2 Notion de solution	4
2.2 Etude et mise en œuvre d'algorithmes et d'outils informatiques d'analyse	4
2.2.1 Inclusions différentielles polygonales par morceaux	5
2.2.1.1 Accessibilité	5
2.2.1.2 L'outil Speedi	6
2.2.1.3 Portrait de phase	6
2.2.2 Systèmes linéaires par morceaux	7
2.2.2.1 Algorithmes numériques pour l'analyse et la simulation	7
2.2.2.2 Approximation de systèmes non-linéaires	8
2.2.2.3 L'outil CASCADE	8
<b>3. VALORISATION DES RESULTATS</b>	<b>9</b>
3.1 Projets d'application aux mathématiques du vivant	9
3.1.1 Application du concept de système hybride en biologie	9
3.2 Analyse Qualitative des Systèmes Hybrides	10
3.2.1 Analyse approchée d'accessibilité par hybridisation	10
3.2.2 L'atelier SQUASH	11
<b>4. CONCLUSIONS</b>	<b>12</b>
<b>5. PRODUCTION SCIENTIFIQUE</b>	<b>12</b>
5.1 Publications	12
5.2 Rapports de thèse	13
5.3 Rapports de DEA	13
5.4 Rapports techniques	13
5.5 Outils d'analyse	13

# 1. INTRODUCTION

## 1.1 CONTEXTE

Le projet IMAG MASH porte sur la modélisation et l'analyse de systèmes hybrides. Ces systèmes sont des outils mathématiques permettant de modéliser l'évolution d'un système physique, technologique, biologique ou économique qui présente plusieurs modes distincts de fonctionnement. Dans chacun des modes, le système est représenté par un système dynamique continu spécifié à l'aide d'équations différentielles ordinaires, d'inclusions différentielles ou d'équations différentielles algébriques. Au cours de son évolution le système doit vérifier un ensemble de contraintes qui caractérisent son domaine de fonctionnement dans le mode considéré. D'autres contraintes déterminent quand le système doit changer de mode de fonctionnement pour recommencer à évoluer suivant une nouvelle dynamique, éventuellement dans un nouvel état initial.

Les systèmes hybrides se retrouvent dans beaucoup de disciplines, comme par exemple l'automobile, l'avionique, la robotique et la génétique, pour en citer quelques-unes. L'état de l'art en matière de méthodes et outils d'aide à la modélisation et l'analyse de systèmes hybrides est loin d'être à la hauteur des besoins. En effet, les concepteurs des applications complexes doivent aujourd'hui se contenter de l'utilisation de méthodes, modèles mathématiques et supports informatiques ad-hoc, d'où l'intérêt d'étudier leur comportement dans le but de développer une méthodologie qui pourrait devenir un outil standard de modélisation et d'analyse pour les ingénieurs dans ces domaines d'application. C'est pourquoi, l'étude des systèmes hybrides est un sujet de recherche très important dans les milieux académiques et industriels.

## 1.2 OBJECTIFS

La recherche sur les systèmes hybrides est née d'une problématique à cheval entre l'automatique et l'informatique. Toutefois, il paraît évident que l'étude de ces systèmes relève également des compétences des mathématiques appliquées. Dans ce sens, le projet IMAG MASH visait la mise en commun des compétences respectives de deux équipes de recherche au sein des laboratoires LMC et VERIMAG dans le but de développer des techniques mathématiques formelles et d'outils informatiques d'aide à la construction de modèles et l'analyse de systèmes hybrides.

Nous rappelons ici les objectifs que nous nous étions fixés :

### 1.2.1 OBJECTIFS SCIENTIFIQUES

Du point de vue scientifique, le projet IMAG MASH visait une étude fondamentale des systèmes hybrides en vue de la mise en évidence des techniques mathématiques de base pouvant servir, à plus long terme, au développement d'une méthodologie d'aide à la modélisation et l'analyse de ces systèmes.

D'une part, il s'agissait d'étudier à l'aide du calcul formel, le problème fondamental de l'existence des trajectoires d'un système hybride. Il était question d'aborder cette thématique en faisant un rapprochement entre le modèle d'automate hybride et celui des inéquations algébro-différentielles.

D'autre part, le projet visait l'étude et la mise en œuvre d'algorithmes de calcul, exact ou approché, de l'ensemble des états accessibles à partir d'un ensemble d'états initiaux. L'idée était d'exploiter les propriétés géométriques des systèmes dynamiques considérés. Il en allait de soit que ceci entraînait naturellement l'étude des problèmes de décidabilité associés.

### 1.2.2 OBJECTIFS SOCIETALES

Sur le plan disciplinaire, l'objectif principal du projet était de créer une synergie entre des équipes de recherche de la Fédération IMAG ayant des compétences individuelles en mathématiques appliquées et en informatique dans le but de :

- favoriser et motiver l'échange d'idées et de connaissances dans un environnement de travail pluridisciplinaire,
- contribuer à l'introduction de la thématique liée à la modélisation et l'analyse de systèmes hybrides dans l'enseignement.

## 2. CONTRIBUTIONS SCIENTIFIQUES

Le travail de recherche mené en proie des objectifs fixés au démarrage a privilégié l'étude des systèmes hybrides sur le plan.

Nous avons étudié notamment les solutions dites « généralisées » de ces systèmes et des techniques d'approximation des équations différentielles par des inclusions différentielles constantes et linéaires par morceaux. Une partie importante de l'activité a été consacrée au développement d'outils.

Notre démarche s'est développée sur deux axes principaux :

- Etude mathématique de la notion de système hybride.
- Etude et mise en œuvre d'algorithmes et d'outils informatiques d'analyse.

### 2.1 ÉTUDE MATHÉMATIQUE DE LA NOTION DE SYSTÈME HYBRIDE

On trouve dans la bibliographie trois formalismes mathématiques pour modéliser et analyser des systèmes hybrides, à savoir :

- les équations différentielles algébriques,
- les inclusions différentielles, et
- les automates dits « hybrides ».

A titre illustratif, prenons l'exemple d'un simple thermostat. Son comportement pourrait être modéliser comme suit :

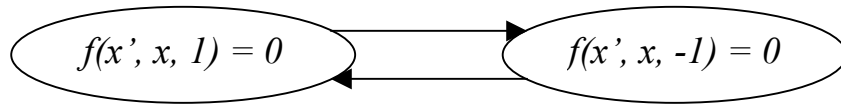
- comme une équation différentielle algébrique, c'est-à-dire comme un mélange d'équations différentielles implicites et d'équations algébriques, par exemple :

$$f(x', x, y) = 0, \quad y^2 - 1 = 0,$$

- comme une inclusion différentielle, ou d'une manière générale comme une relation sur les variables et ses dérivées, par exemple :

$$F(x', x) \text{ où } F(z, x) \equiv (\exists y) (f(x', x, y) = 0 \ \&s \ y^2 - 1 = 0),$$

- comme un automate hybride où les sommets correspondent aux solutions de l'équation algébrique :



Cet exemple montre qu'il existe une relation étroite entre ces modèles. Le point de départ de l'étude sur la notion mathématique de système hybride, identifié dans la proposition initiale du projet MASH, était donc que les automates hybrides pouvaient être vus comme des systèmes d'équations différentielles implicites et d'inéquations algébriques.

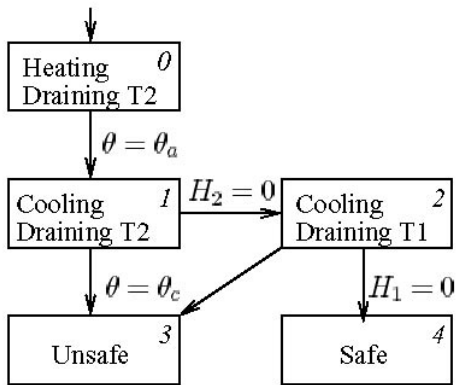
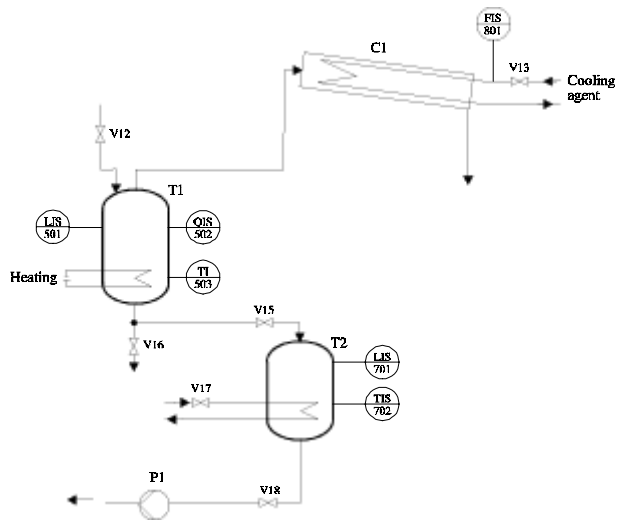
### 2.1.1 LES SYSTEMES PAR MORCEAUX

Nous avons commencé par étudier ce problème dans le cadre du calcul formel. Nous avons identifié une approche qui peut se résumer ainsi [DY01] :

- Calculer des intégrales premières pour réduire l'ordre des systèmes ;
- Résoudre les équations résultantes par intégration symbolique.

Cette approche a été appliquée pour analyser une étude de cas dans le cadre du projet européen ESPRIT LTR VHS « Verification of Hybrid Systems ».

Il s'agit l'évaporateur de l'usine chimique du Laboratoire de Génie Chimique de l'Université de Dortmund.



Les équations différentielles implicites sont de la forme :

$$H'^2 + aH = 0$$

$$\theta' H + k(\theta - c)(b + dH) = 0$$

où  $\theta$  est la température du liquide et  $H$  est le niveau du réservoir.

L'étude complète est présentée dans la rapport de DEA de M. Renaudie [Ren00].

Cette approche se heurte toutefois à une difficulté intrinsèque : les algorithmes symboliques sont d'une trop grande complexité. Il est donc apparu assez rapidement que nous devions proposer un nouveau modèle pour représenter ces systèmes. L'idée de ce modèle est la conséquence de discussion sur les systèmes hybrides. Elle peut être expliquée simplement sur un exemple : Pour intégrer l'équation différentielle  $x' = x^2$  avec une condition initiale  $x(0) = 1$  par exemple, on peut utiliser une méthode numérique qui discrétise le temps et recherche la solution sur la grille ainsi obtenue. Notre idée est au contraire de discrétiser l'espace par une approximation de la fonction  $f(x) = x^2$  et d'en déduire le temps que passe le système dans une

cellule spatiale donnée où l'équation soit remplacée par un modèle approché, en général linéaire. On peut comparer cette approche à la méthode de Lebesgue pour intégrer une fonction.

Nous avons alors proposé le modèle des systèmes linéaires par morceaux. Il s'agit d'automates hybrides où la dynamique continue est définie par des équations (ou des inclusions) linéaires sur une partition du domaine des variables.

### **2.1.2 NOTION DE SOLUTION**

Il est apparu très vite que la notion de solution classique d'une équation différentielle ne suffisait plus dans le cas de systèmes par morceaux. Nous avons exploré dans le cadre de la thèse de Mme Mirica-Russe [[Mir02](#)] comment se généralisait la notion de solution sur plusieurs exemples scalaires.

La perte d'unicité, le caractère absolument continu des solutions sont la conséquence immédiate du changement de modèle de calcul. Mais alors les outils habituels (essentiellement des développements plus ou moins sophistiqués en série) ne s'appliquaient plus.

Nous avons exploré alors les diverses notions de solution qui existent : les solutions de Carathéodory, de Filipov et d'Euler, celles de viscosité et autres. La construction de ces solutions en est (du point de vue symbolique) à ses débuts et aucun travail n'existe sur le sujet. En effet, en calcul symbolique une solution est avant tout analytique et est une fonction complexe d'une variable complexe.

En fait la notion de solution d'un problème de Cauchy perd de son sens dès que l'on se retrouve dans des cas naturels de non-unicité et la vraie question est celle du calcul de l'ensemble des solutions.

Plusieurs systèmes particuliers ont été étudiés mettant ainsi en évidence la richesse de cette problématique et plusieurs pistes de recherche à explorer, en particulier la théorie des inclusions différentielles dont les équations différentielles algébriques sont, en un certain sens, un cas particulier.

Ce travail a permis d'étudier la notion même de système hybride et d'en proposer certaines modifications en direction des systèmes hybrides « ouverts », c'est à dire, commandés par un contrôleur qu'il faut identifier.

L'originalité et l'intérêt de l'approche résultent du fait que ces solutions n'avaient jamais été étudiées auparavant dans le cadre du calcul symbolique.

## **2.2 ETUDE ET MISE EN ŒUVRE D'ALGORITHMES ET D'OUTILS INFORMATIQUES D'ANALYSE**

L'analyse de modèles mathématiques par le biais de méthodes algorithmiques nécessite au préalable d'une étude approfondie pour déterminer si le problème en question est décidable ou non. Si oui, il est donc possible d'implémenter une procédure pour calculer une réponse exacte. Au cas contraire, il devient nécessaire d'appliquer des techniques approchées. Souvent, celles-ci sont aussi utilisées pour aborder des problèmes décidables mais ayant une complexité qui rend l'analyse exacte pratiquement impossible.

Dans le domaine des systèmes hybrides, la plupart des résultats de décidabilité que l'on trouve dans la bibliographie sont fondés sur l'existence d'une partition finie de l'espace d'états. Pourtant, ces preuves ne donnent pas directement des algorithmes exploitables. Les outils d'analyse existants font donc appel à des méthodes approchées basées sur des représentations symboliques, le plus souvent polyédriques ou ellipsoïdales. Le grand avantage de ces techniques est qu'elles ont un très ample spectre. Par contre, leur inconvénient majeur est qu'elles n'exploitent pas les propriétés géométriques des systèmes, ce qui s'est traduit en des analyses trop grossières avec beaucoup d'erreur.

Cette réflexion, ainsi que les difficultés inhérentes à aborder le problème dans le cadre du calcul formel par le biais des inéquations différentielles algébriques, nous a mené à orienter notre travail vers l'étude de systèmes hybrides susceptibles d'être analysés par des techniques algorithmiques basées sur des propriétés qualitatives des comportements dynamiques.

Dans un premier abord, nous avons focalisé nos recherches sur les systèmes à deux dimensions. Nous avons étudié deux classes de systèmes :

- Les inclusions différentielles polygonales par morceaux, et
- Les équations différentielles linéaires par morceaux.

## 2.2.1 INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES POLYGONALES PAR MORCEAUX

Ce thème a été abordé dans le cadre de la thèse de Mr Gerardo Schneider [[Sch02](#)].

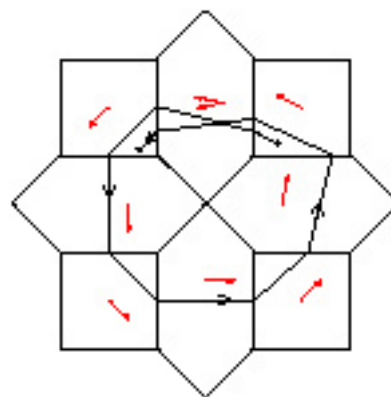
Nous appelons *inclusion différentielle polygonale par morceaux*, un système d'inclusions différentielles de la forme :

$$x' \in D_i, \text{ quand } x \in P_i \subseteq \mathbf{R}^2$$

où  $D_i$  et  $P_i$  sont des polygones, et  $\{ P_i \}_{i \in I}$  est une partition finie de  $\mathbf{R}^2$ .

Un *segment de trajectoire* d'un tel système est une fonction :

$$\xi : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^2$$



tel que pour tout  $t \in [0, T]$ , si  $\xi(t) \in P_i$  et  $\xi'(t)$  est définie alors  $\xi'(t) \in D_i$ . Si  $T$  est infini, on appelle alors  $\xi$  une *trajectoire*. Un segment de trajectoire détermine une *signature*  $\sigma$  définie par la suite ordonnée des arêtes des polygones traversés par elle. La figure ci-dessus montre un exemple d'inclusion différentielle polygonale et d'un segment de trajectoire.

### 2.2.1.1 ACCESSIBILITE

Nous avons d'abord étudié le problème de l'accessibilité entre deux points  $p$  et  $q$  donnés : *Existe-t-il un segment de trajectoire qui a comme état initial  $p$  et comme état final  $q$  ?*

Nous avons prouvé que ce problème est en effet décidable [[ASY01](#)].

Le résultat est basé sur la représentation des trajectoires par des fonctions multivaluées affines par morceaux. Etant donné un polygone  $P$  et deux de ses arêtes  $e$  et  $f$ , l'ensemble de tous les points accessibles de n'importe quel point  $x \in e$ , est défini par la fonction multivaluée :

$$\Phi_{e_j}(x) = [a x + b, c x + d]$$

où les coefficients dépendent de  $e, f$  et le polygone  $D$  qui définit la dynamique du système dans le polygone  $P$ .

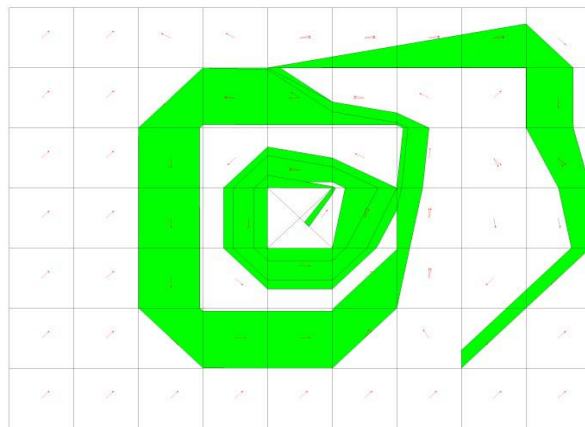
Cette technique (qui reprend l'idée des fonctions de Poincaré) permet de définir un système dynamique unidimensionnel dont le comportement qualitatif est équivalent au système continu en dimension deux. Étant donné une signature  $\sigma = e_0 \dots e_k$ , les points accessibles à partir d'un point  $x$  par un segment de trajectoire dont la signature est  $\sigma$  sont définis par :

$$\Phi_{\sigma}(x) = \Phi_{e_0 e_1} \circ \dots \circ \Phi_{e_{k-1} e_k}(x) = [\alpha x + \beta, \gamma x + \delta]$$

Ceci permet de déterminer la limite d'un segment de trajectoire dont la signature est  $\sigma$  par un simple calcul de point-fixe. Le résultat de décidabilité est obtenu en combinant cette technique à une analyse qualitative des segments de trajectoire qui permet de classifier les signatures de trajectoires cycliques en un certain nombre de types différents. Cette typologie est utilisée pour déterminer si une signature donnée peut être répétée un nombre infini de fois par une trajectoire où si au bout d'un certain temps elle sera abandonnée.

### 2.2.1.2 L'OUTIL SPEEDI

Ce résultat a donné lieu à un algorithme permettant de répondre oui ou non à la question s'il est possible d'atteindre un point  $q$  du plan à partir d'un point  $p$  en suivant la dynamique définie par une inclusion différentielle polygonale. Cet algorithme a été implémenté dans le cadre de l'outil SPEEDI, dont l'architecture et les fonctionnalités sont décrites brièvement dans [APSY02] et plus en détail dans [Sch02]. La figure ci-contre montre la sortie



graphique générée par SPEEDI lorsque la réponse à la question de l'accessibilité est positive. La zone colorée en vert est le ruban des points atteignables en faisant plusieurs tours dans deux signatures cycliques imbriquées, puis un morceau non-cyclique.

### 2.2.1.3 PORTRAIT DE PHASE

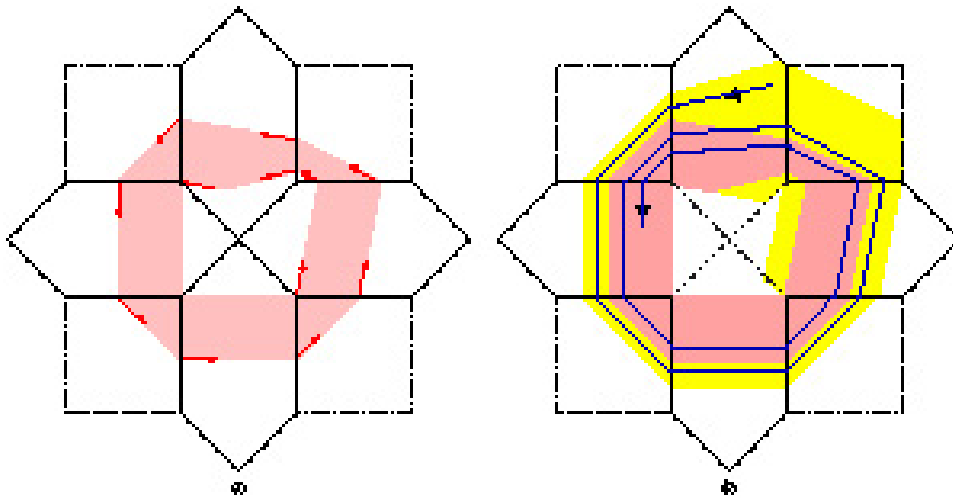
La question de l'accessibilité a été le problème le plus souvent abordé dans le cadre des systèmes hybrides. En revanche, la notion de portrait de phase, pourtant centrale dans la théorie des systèmes dynamiques, a été très peu étudiée. Nous avons donc proposé d'approfondir cette question dans le contexte des inclusions polygonales par morceaux.

Il n'est pas clair a priori ce que c'est que le portrait de phase d'un tel système. Pour commencer, nous avons concentré notre attention sur l'étude des ensembles de trajectoires

ayant un comportement cyclique. Nous avons étudié deux notions, celles de *noyau de viabilité* et de *noyau de contrôlabilité* [ASY02].

On dit qu'une trajectoire  $\xi$  est *viable* dans un ensemble  $K$  si pour tout  $t \geq 0$ ,  $\xi(t) \in K$ . On dit que  $K$  est un *domaine viable* si pour tout  $x \in K$  il existe une trajectoire viable dans  $K$  qui part de  $x$ . On appelle *noyau de viabilité* d'un ensemble  $K$  le plus grand domaine viable dans  $K$ .

Nous avons étudié le noyau de viabilité pour les trajectoires avec signature cyclique, c'est-à-dire, l'ensemble de points à partir desquels il est possible de continuer à « tourner » dans un cycle d'arêtes. Nous avons montré que cet ensemble est un polygone non-convexe. La figure ci-dessous donne un exemple de noyau de viabilité. Il s'agit du polygone colorié en jaune.



On dit qu'un ensemble  $K$  est *contrôlable* s'il est possible d'aller de n'importe quel point de  $K$  à un voisinage aussi petit que l'on veut de n'importe quel autre point de  $K$  par un segment de trajectoire sans jamais sortir de  $K$ . On appelle *noyau de contrôlabilité* le plus grand sous-ensemble de  $K$  qui est contrôlable.

Nous avons montré que la notion de noyau de contrôlabilité est en l'analogie de celle de cycle limite. En effet, nous avons prouvé que toute trajectoire ayant une signature cyclique converge vers le noyau de contrôlabilité du cycle. La figure ci-dessus illustre le noyau de contrôlabilité, colorié en rose. On observe également la relation entre les deux noyaux.

Les noyaux de contrôlabilité sont des objets très importants du portrait de phase d'une inclusion polygonale par morceaux. En effet, nous avons démontré que toute trajectoire sans auto-intersections converge vers l'un de ces noyaux. Ceci est l'analogie du théorème de Poincaré-Bendixon pour les trajectoires simples.

## 2.2.2 SYSTEMES LINEAIRES PAR MORCEAUX

Ce thème est abordé dans le cadre du travail de thèse de M. Antoine Girard.

### 2.2.2.1 ALGORITHMES NUMERIQUES POUR L'ANALYSE ET LA SIMULATION

La simulation des systèmes hybrides est un problème très compliqué. En effet, l'existence d'événements discrets se réalisant en temps nul rend l'utilisation des méthodes classiques de

simulation des systèmes dynamiques inefficace. Ainsi, en général les simulateurs de systèmes hybrides utilisent une discrétisation uniforme du temps. Malheureusement, ils ne peuvent pas garantir qu'aucun événement ne s'est produit entre deux valeurs successives de la discrétisation. La simulation peut alors donner des résultats incohérents à cause du caractère discontinu du système.

Nous avons donc cherché des algorithmes de simulation permettant de détecter à coup sur l'occurrence d'événements discrets lors de la simulation. Cet algorithme utilise essentiellement des résultats venant de la théorie des équations différentielles linéaires, de la géométrie convexe et des algorithmes pour la résolution des équations non-linéaires. Le principe est le suivant, on cherche à construire dynamiquement une discrétisation du temps telle que :

- On puisse garantir qu'aucun événement discret ne s'est produit entre deux valeurs successives de la discrétisation.
- La suite des valeurs de la discrétisation converge le plus vite possible vers le temps où un événement discret se produit.

Ces résultats ont été publiés dans [[Gir02b](#)].

### 2.2.2.2 APPROXIMATION DE SYSTEMES NON-LINEAIRES

L'idée de remplacer une dynamique non-linéaire par une dynamique linéaire par morceaux n'est pas vraiment nouvelle. Cependant, aucune étude sérieuse du point de vue mathématique n'avait été menée. Je me suis donc attaché cette année à étudier ce problème. Notre démarche est la suivante, étant donné une équation différentielle :

$$x' = F(x), \text{ avec } x \in \Omega,$$

on construit un maillage  $\Omega_i$  de l'espace des phases. Ce maillage peut être généré de manière statique ou bien dynamique. On calcule ensuite la fonction  $\varphi$  qui est la fonction linéaire par morceaux interpolante de  $F$  aux sommets du maillage. Nous remplaçons alors l'étude du premier système par l'étude de :

$$x' = \varphi(x), \text{ avec } x \in \Omega_i$$

Nous avons ainsi mené une étude approfondie du cas unidimensionnel afin de montrer l'efficacité d'une telle approche. Nous avons obtenu des résultats théoriques solides sur l'estimation de l'erreur produite et sur la stabilité numérique de cette approche. Ces résultats ont été confirmés expérimentalement. Une étude du cas de la dimension deux a aussi été réalisée. Celle ci montre que la méthode est encore efficace en dimension deux.

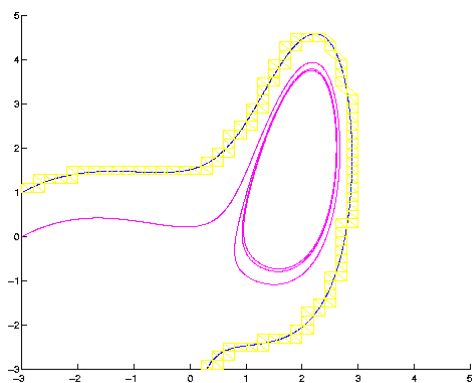
Ces résultats ont été publiés dans [[Gir02a](#)].

### 2.2.2.3 L'OUTIL CASCADE

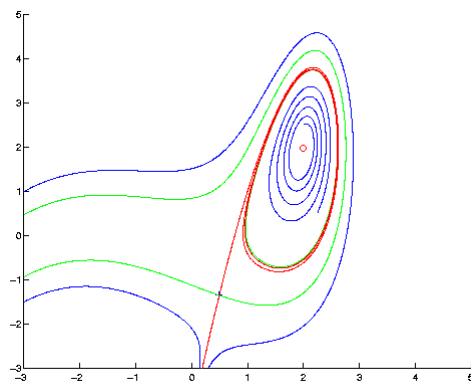
Les résultats précédents ont été implémentés dans le cadre de l'outil CASCADE (Computational Analysis and Simulation using Continuous Approximations for Differential Equations).

Cet outil permet :

1. La simulation de trajectoires,
  2. Le calcul et l'analyse de stabilité de cycles limites,
- pour des systèmes linéaires par morceaux en deux dimensions.



(1)



(2)

### 3. VALORISATION DES RESULTATS

Il est évident que les résultats obtenus sont dans un stade préliminaire qui exclue une valorisation industrielle immédiate et directe. Néanmoins, nous avons cherché à valoriser nos idées et nos techniques au travers des projets de recherche scientifique.

Nous avons travaillé sur deux axes :

- L'application aux mathématiques du vivant,
- La création d'un atelier d'analyse qualitative de systèmes hybrides.

#### 3.1 PROJETS D'APPLICATION AUX MATHÉMATIQUES DU VIVANT

Des discussions avec M. J. Demongeot (TIMC) nous ont persuadées du potentiel intérêt de l'application des modèles et des techniques hybrides à la régulation du cycle cellulaire. Nous explorons cette direction de recherche dans le cadre du projet Mathématiques pour ADEMO, soutenu par la Région Rhône-Alpes. Ce projet finance la bourse de M. Girard.

Des nombreuses discussions avec M. A. Antoniadis (LMC) sur l'utilisation des résultats de mesures effectuées sur les bio-puces nous ont conduit à participer au projet IMAG ABS-GEN. Cette direction de travail s'inscrit dans l'émergence au sein de l'IMAG des projets dirigés vers les mathématiques du vivant.

##### 3.1.1 APPLICATION DU CONCEPT DE SYSTEME HYBRIDE EN BIOLOGIE

Nous avons commencé par mettre en évidence la pertinence probable du concept de système hybride en biologie.

En effet, nous pouvons décrire l'évolution d'une cellule dans son cycle de vie par plusieurs modes : la phase G1 de croissance, la phase S de duplication de l'ADN, une autre phase de croissance G2 puis la phase M correspondant à la duplication de la cellule (et qui sera divisée en plusieurs sous-phases : mitose, ...).

Ensuite à partir d'expériences et de mesures, on essaiera d'exprimer la dynamique propre à chaque phase par un modèle mathématique adéquat prenant en compte la spécificité du mode : si on étudie par exemple le niveau moléculaire dans la cellule c'est aux équations de la dynamique moléculaire que l'on fera appel, si on s'intéresse à la phase de croissance, des systèmes aux dérivées partielles de réaction-diffusion seront de règle, si un ou quelques molécules sont en œuvre alors la modélisation stochastique devra être employée.

Nous avons d'abord exploré sur le modèle de l'opérande lactose de Jacob et Monod l'utilisation possible des systèmes hybrides. Il est apparu que plusieurs modèles mathématiques (par exemple, modèles booléens, modèles de Glass, ...) permettant de modéliser ce qui se nomme la régulation génétique existaient. Ces modèles sont très étudiés mais on n'avait pas mis en évidence le fait que ce sont des cas particuliers de systèmes hybrides.

L'étude de cette thématique a été entamée dans le cadre des DEA de M. Etienne Farcot [[Far01](#)] et M. Laurent Tournier [[Tou01](#)]. Elle est explorée à présent dans leurs thèses respectives.

### 3.2 ANALYSE QUALITATIVE DES SYSTEMES HYBRIDES

Les travaux de recherche entamés dans le cadre de MASH se poursuivent dans le cadre de projet Projet CNRS MathSTIC « SQUASH » Analyse *Qualitative* des *Systèmes Hybrides*.

Dans le projet Squash nous avons prévu notamment d'étudier les sujets théoriques suivants :

- Systèmes hybrides par morceaux en dimension supérieure à deux.
- Approximation des équations et inclusions différentielles non-linéaires par des systèmes hybrides.

Pour valider les résultats théoriques et pour effectuer le travail expérimental et applicatif nous avons prévu d'implanter les algorithmes dans un atelier de systèmes hybrides contenant des outils interconnectables, tels que :

- **Editeur** : un outil visuel qui permet à l'utilisateur de décrire facilement un système hybride et qui génère un automate hybride pour ce système.
- **Hybridisateur** : un outil pour approcher les équations d'un système non linéaire par un automate hybride.
- **Simulateur** : pour générer et visualiser les comportements de systèmes hybrides planaires.
- **Vérificateur** : pour effectuer l'analyse d'atteignabilité de systèmes hybrides.
- **Portraitiste** : pour construire le portrait de phase d'un système hybride.

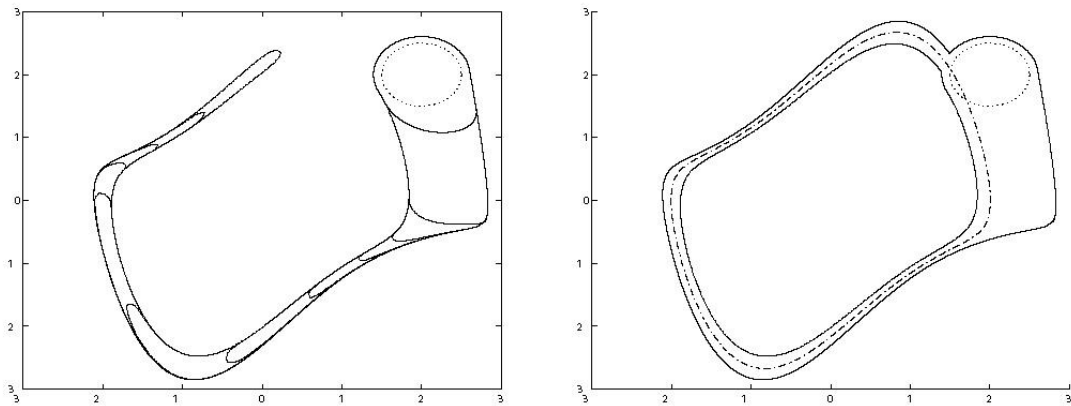
#### 3.2.1 ANALYSE APPROCHEE D'ACCESSIBILITE PAR HYBRIDISATION

L'idée de l'approche proposée est d'approcher la dynamique non-linéaire correspondant à chaque état de l'automate hybride  $A$  par une dynamique linéaire par morceaux. De cette manière on peut transformer  $A$  en un automate hybride linéaire (qui a beaucoup plus d'états

discrets) et qui donne une très bonne approximation de  $A$ . Nous avons commencé à étudier une technique qui repose sur :

- Une méthode efficace d'approximation d'une équation non-linéaire  $N$  par un système linéaire par morceaux  $L$ . Elle est fondées sur les idées exposées plus haut.
- Un algorithme de calcul d'une sur-approximation de l'ensemble atteignable de  $N$  est donné. Cet algorithme est fondé sur les calculs dans  $L$ . L'erreur de cet algorithme est estimée et cette estimation est tout à fait satisfaisante.

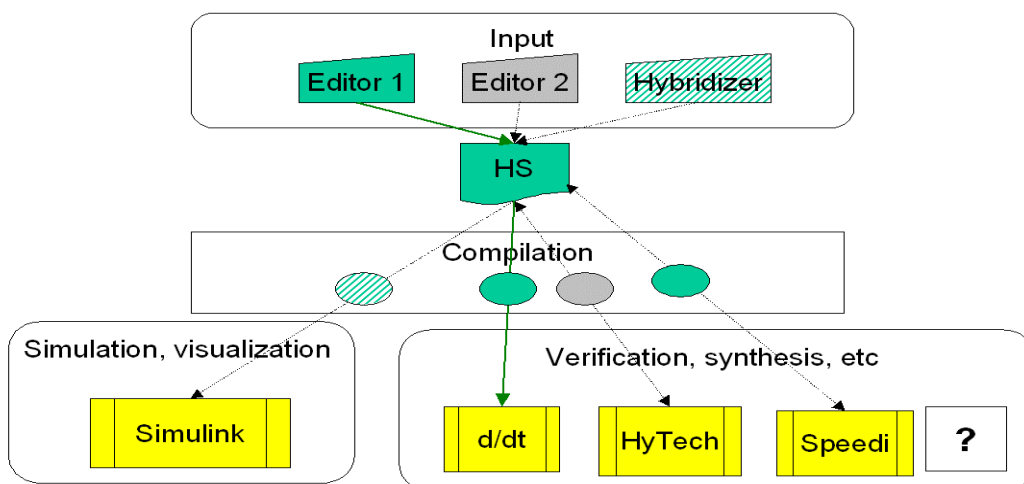
Nous avons validé cette technique par quelques expériences pour des systèmes planaires.



Nous l'implantons actuellement dans **d/dt** de VERIMAG pour les systèmes de dimension supérieure. Nous avons concrétisé cette approche dans [ADG02].

### 3.2.2 L'ATELIER SQUASH

En ce qui concerne l'atelier logiciel des systèmes hybrides, nous avons conçu une architecture générale qui permet d'interconnecter et d'utiliser ensemble des outils différents.



Cette architecture s'appuie sur un format XML pivot de représentation des automates hybrides. Les nouveaux outils utiliseront ce format pour leurs entrées/sortie, tandis que pour les outils existants on développe des programmes d'interfaçage (compilateurs) pour importer/exporter les automates en format XML.

Nous avons déjà implanté le format pivot, un éditeur des automates hybride, un premier hybridisateur, des convertisseurs vers les outils de vérification tels que d/dt et Speedi. Nous travaillons actuellement sur le convertisseur vers Simulink, qui permettra de profiter de toute la puissance de Simulink pour la simulation et la visualisation des comportements des systèmes hybrides.

## 4. CONCLUSIONS

Le projet IMAG MASH a contribué à la réalisation de plusieurs objectifs tant scientifiques que structureaux. Il a permis :

- D'établir une réelle collaboration entre deux équipes de l'IMAG qui s'est traduite par des co-encadrements (stages, DEA, thèses), des séminaires communs, des cours de DEA et des participations à plusieurs manifestations scientifiques;
- De motiver plusieurs étudiants dans un domaine scientifique nouveaux et probablement porteur pour leur avenir universitaire;
- De dégager des questions scientifiques qui modifient les visions initiales réciproques des systèmes hybrides et de l'apport du calcul symbolique à cette discipline;
- D'identifier des applications originales des systèmes hybrides à des domaines tels que la biologie et le calcul scientifique.

De notre point de vue il est certain que ce projet a beaucoup apporté aux participants.

Nous continuons à travailler ensemble dans plusieurs projets en cours, tels que Mathématiques pour ADEMO (Région Rhône-Alpes), Squash (CNRS-STIC) et CC (Européen ESPRIT-LTR).

## 5. PRODUCTION SCIENTIFIQUE

### 5.1 PUBLICATIONS

[APSY02] E. Asarin, G. Pace, G. Schneider, and S. Yovine. *SPeeDI -- a Verification Tool for Polygonal Hybrid Systems*. In CAV'02. LNCS 2404, Springer-Verlag, 2002.

[AS02] E. Asarin and G. Schneider. *Widening the boundary between decidable and undecidable hybrid systems*. In CONCUR'2002. LNCS 2421, Springer-Verlag, 2002.

[ASY01] E. Asarin, G. Schneider, and S. Yovine. *On decidability of the reachability problem of planar differential inclusions*. In HSCC'01. LNCS 2034, Springer, 2001.

[ASY02] E. Asarin, G. Schneider, and S. Yovine. *Towards computing phase portraits of polygonal differential inclusions*. In HSCC'02. LNCS 2289, Springer-Verlag, 2002.

[DMMY01] J. Della Dora, A. Maignan, M. Mirica-Ruse, and S. Yovine. *Hybrid computation*. In ISSAC'01. Ontario, Canada, July 2001.

[DY01] J. Della Dora and S. Yovine. *A methodology for analyzing the dynamics of hybrid systems*. In European Control Conference, ECC'01. Porto, Portugal, September 2001.

**[Gir02a]** A. Girard. *Approximate solutions of ODEs using piecewise linear vector field*. In CASC 2002, 22-27 september 2002, Yalta, Ukraine.

**[Gir02b]** A. Girard. *Detection of event occurrence in piecewise linear hybrid systems*. In RASC 2002, 12-13 decembre 2002, Nottingham, UK.

## 5.2 RAPPORTS DE THESE

**[Mir02]** M. Mirica-Russe. *Contribution à l'étude des systèmes hybrides*. Ph.D. thesis. Université Joseph Fourier, Grenoble. September 2002.

**[Sch02]** G. Schneider. *Algorithmic Analysis of Polygonal Hybrid Systems*. Ph.D. thesis. Université Joseph Fourier, Grenoble. July 2002.

## 5.3 RAPPORTS DE DEA

**[Ren00]** D. Renaudie. *Modélisation des systèmes hybrides*. DEA Mathématiques Appliquées, ENSIMAG, juin 2000.

**[Gir01]** A. Girard. *Etude de Systèmes Dynamiques Hybrides Affines par Morceaux*. DEA Mathématiques Appliquées, ENSIMAG, juin 2001.

**[Far01]** E. Farcot. *Réseaux de régulation génétique. Le modèle linéaire par morceaux*. DEA Mathématiques Appliquées, ENSIMAG, juin 2001.

**[Tou01]** L. Tournier. *Etude et Modélisation de Réseaux de Régulation Génétique*. DEA Mathématiques Appliquées, ENSIMAG, juin 2001.

## 5.4 RAPPORTS TECHNIQUES

**[ADG02]** E. Asarin, T. Dang, and A. Girard. *Reachability Analysis of Nonlinear Systems Using Conservative Approximation*. November 2002. Submitted to HSCC 2003.

## 5.5 OUTILS D'ANALYSE

Nous avons mis en œuvre les outils d'analyse suivants :

- **Speedi** : Un outil d'analyse de systèmes hybrides polygonaux.
- **CASCADE** : Un outil d'approximation de systèmes d'équations différentielles par des systèmes linéaires par morceaux.